Α 4. Έστω c ένας κύκλος μήκους n τής συμμετρικής ομάδας S_n. Να δειχθεί ότι ο *κεντροποιητής* $C_{S_n}(c) = \{\sigma \in S_n \mid c \circ \sigma = \sigma \circ c\}$ τού στοιχείου c ισούται με την κυκλική υποομάδα $\langle c \rangle$.

Λύση. Το πλήθος των κύκλων μήκους n στην S_n ισούται με

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n-1)!$$

Θεωρούμε τη δράση τής S_n επί τού εαυτού της μέσω συζυγίας:

$$S_n \times S_n \to S_n, (\sigma, \alpha) \mapsto \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}.$$

Αν c είναι οποιοσδήποτε κύκλος μήκους n, τότε η κλάση συζυγίας του $\mathcal{O}(c)$ αποτελείται από όλους τους κύκλους μήκους n, αφού γνωρίζουμε ότι αν c_1, c_2 είναι δύο κυκλοι n, τότε υπάρχει $\sigma \in S_n$ με $\sigma \circ c_1 \circ \sigma^{-1} = c_2$. Γι' αυτό το πλήθος $|\mathcal{O}(c)|$ των στοιχείων τής $\mathcal{O}(c)$ ισούται με $(n-1)!$.
Γνωρίζουμε επίσης ότι $|\mathcal{O}(c)| = [S_n : C_{S_n}(c)]$, όπου $C_{S_n}(c)$ είναι ο σταθερωτής τού c, δηλαδή η υποομάδα

$$C_{S_n}(c) = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = c\} = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ c = c \circ \sigma^{-1}\}.$$

(Δηλαδή εδώ ο σταθερωτής συμπίπτει με τον κεντροποιητή.)

Επομένως, $[S_n : C_{S_n}(c)] = (n-1)! \Rightarrow [C_{S_n}(c) : 1] = n$. Επειδή όμως, $\langle c \rangle \leq C_{S_n}(c)$ και $[\langle c \rangle : 1] = n$, έπεται $C_{S_n}(c) = \langle c \rangle$.